

L'essentiel de 1^{re} S

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Fiche

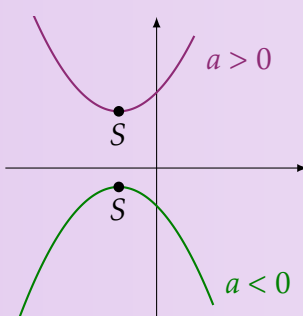
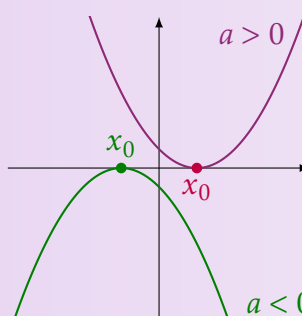
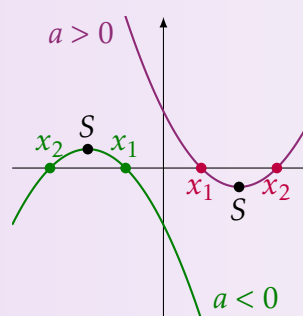
par
Stéphane PASQUET

21 février 2018

Le second degré

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Pas de racines	1 racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$	2 racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Pas de factorisation	$P(x) = a(x - x_0)^2$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
		

Forme canonique : $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. **Sommet :** $S(\alpha; \beta)$

Suites

Suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + r$ $u_n = u_0 + nr$ ou encore $u_n = u_p + (n - p)r$.
 $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (\text{nb. termes}) \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques : $u_{n+1} = qu_n$ $u_n = u_0 \times q^n$ ou encore $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb. termes}}}{1 - q} = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Sens de variation : Si $u_{n+1} - u_n > 0$, (u_n) est croissante.

Si $u_n > 0$ et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, (u_n) est croissante.

Dérivation

Taux d'accroissement de f au point d'abscisse a : $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Nombre dérivé de f au point d'abscisse a : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$.

Nombre dérivé = coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a

Équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$ku, k \in \mathbb{R}^*$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Valeur absolue

Définition : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Distance : $|x - y|$ = distance entre x et y .

Vecteurs & droites

$A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Coordonnées : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Norme : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Relations de Chasles sur les vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Déterminant : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$.

Colinéarité : $\vec{u} = k\vec{v} \iff \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires (il sont la même direction)
 $\iff \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

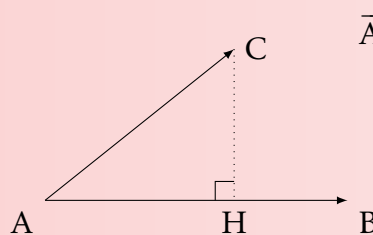
Alignement de points : A, B et C sont alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Coefficient directeur de (AB) : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Équation cartésienne de (AB) : $ax + by + c = 0$, où $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est colinéaire à \overrightarrow{AB} .

Trouver une équation cartésienne de (AB) : $M(x; y) \in (AB) \iff \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$.

Produit scalaire



$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \\ &= AB \times AH \text{ (si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont dans le même sens)} \\ &= -AB \times AH \text{ (si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ pas dans le même sens)}\end{aligned}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Vecteurs orthogonaux : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Vecteur normal : $(d) : ax + by + c = 0$. $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d) .

Équation d'un cercle : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, $\Omega(a; b)$ centre du cercle de rayon r .

Théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$, I milieu de $[BC]$.

Formule d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$.

Trigonométrie

Angles (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Formules d'addition

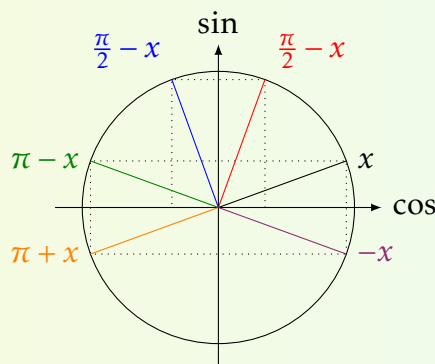
$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \\ \sin 2a &= 2\sin a \cos a\end{aligned}$$

Formules de rotation

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x\end{aligned}$$



Statistiques descriptives

Moyenne : $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i$ avec $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Variance : $V = \frac{1}{N} \left[n_1 (\bar{x} - x_1)^2 + n_2 (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + n_k (\bar{x} - x_k)^2 \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x} - x_i)^2$

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \bar{x}^2 \text{ (formule de König-Huygens)}$$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{V}$

Probabilités

$X = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ variable aléatoire de loi de probabilité $(x_i ; p_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ **Variance :** $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 \times p_i$

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Propriétés : $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$, $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

Loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$. Alors, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ($1 \leq k \leq n$)

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Fluctuation & échantillonnage

On considère un échantillon d'effectif $n \geq 25$ au sein d'une population et on y observe un caractère, de probabilité p telle que $0,2 \leq p \leq 0,8$. La fréquence de ce caractère dans cette population est notée f .

Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % vu en 2nde : $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

Cas d'une fréquence liée à une variable aléatoire suivant une loi binomiale : X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, $F = \frac{X}{n}$ est la variable aléatoire représentant les fréquences possibles du succès sur les n répétitions.

Un intervalle de fluctuation de F au seuil de 95 % est un intervalle $I = \left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n} \right]$ où :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 2,5\%$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \geq b) \geq 97,5\%$.

Prise de décision : si $f \notin I$, alors on peut rejeter l'hypothèse selon laquelle l'échantillon est représentatif de la population.